

# Filtrage de Kalman invariant pour la robotique bipède

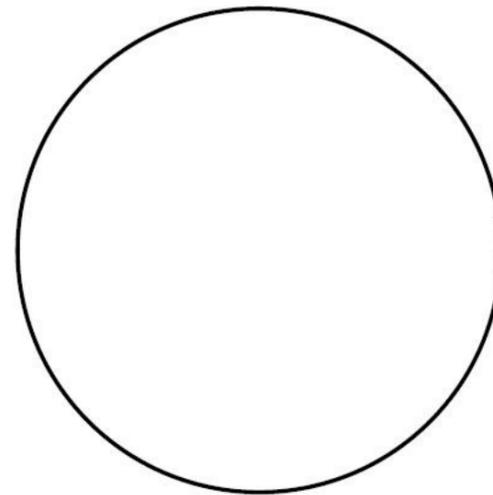
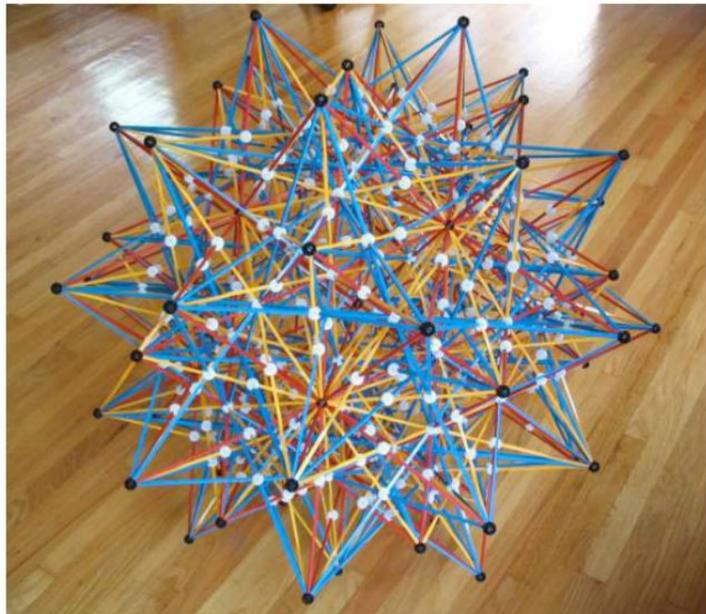
Silvère Bonnabel,  
centre de robotique, Mines Paris PSL  
JNRH 2023, 7 Juillet 2023, Bordeaux

Collaboration avec Axel Barrau

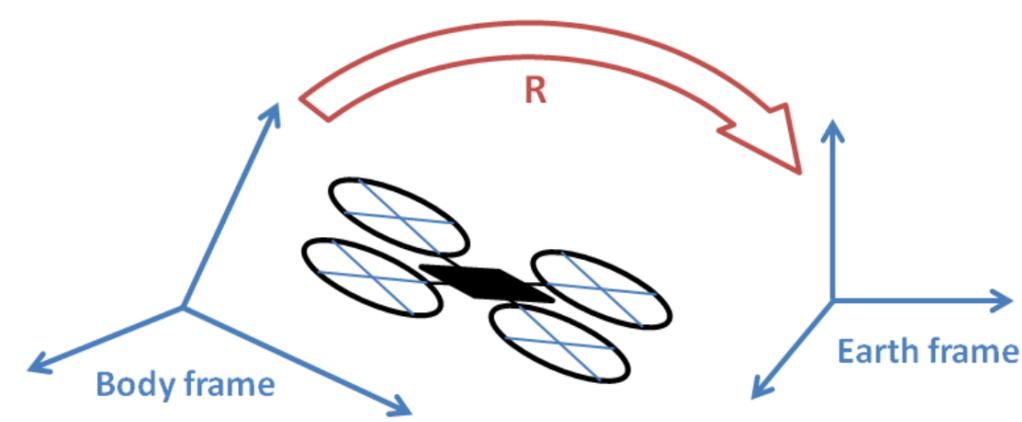


# Filtrage invariant = EKF + groupes de Lie = Garanties mathématiques

- Notion de groupe de Lie, en l'honneur de Sophus Lie (1842-1899)
- Groupe discret (cristallographie)
- Groupe continu (ex : toutes les rotations) = groupe + manifold



# Histoire des idées : groupes de Lie et estimation

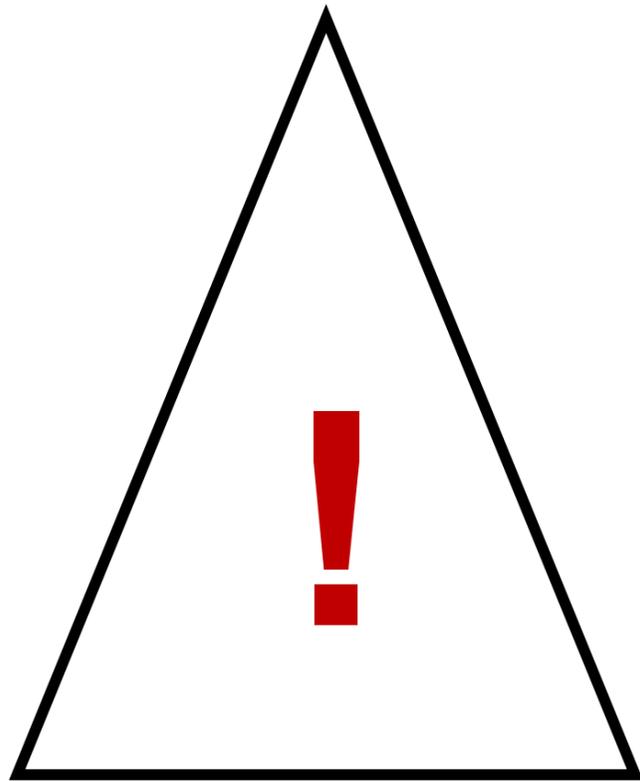


- **Premiers travaux en contrôle:** [Jurdjevic, Sussmann, 1972], [Bullo, Murray, 1999], [Morin, Samson, 2003]
- **Filtre complémentaire non linéaire sur  $SO(3)$  &  $SE(3)$ :** [Mahony, Hamel, Pflimlin, 2005 & 2008], [Baldwin, R Mahony, J Trumpf, T Hamel, T Cheviron, 2007]
- **Observateurs d'attitude non linéaires convergents:** [Sanyal, Lee, Leok, McClamroch, 2008], [Lageman, Trumpf, Mahony, 2009], [Vasconcelos, Cunha, Silvestre, Oliveira, 2010], [Hua, 2010], [Tayebi, McGillvray, Roberts, Moallem, 2007], [Batista, Silvestre, Oliveira, 2012], [Zlotnik, Forbes, 2018]
- **Observateurs invariants:** [Rouchon, Aghannan, 2002], [Bonnabel, Martin, Rouchon, 2008]
- **Premiers filtres de Kalman étendus invariants :** [Bonnabel, 2007], [Martin, Salaun, 2010], [Barczyk, Lynch, 2012]
- **Théorie « moderne » du filtrage invariant :** [Barrau, Bonnabel, 2016] voir prochains slides

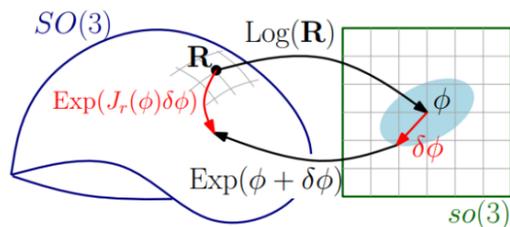
+ théorie  
parallèle et  
ultérieure en  
robotique  
mobile à roues  
basée  $SE(2)$

# Groupes de Lie et robotique

Le terme “Lie group” revêt plusieurs choses en robotique



1. *Représentation* des rotations “on Lie groups” = “on manifold” (!) -> groupe  $SO(3)$
2. Représentation des transformations rigides (première notion de couplage rotation/translation) -> groupe  $SE(3)$
3. Structure compatible avec les équations de dynamique
  - Robots à roues (Chirikjian et. al. 2012, Barfoot & Furgale 2014)
  - Equations de l'IMU -> groupe  $SE_2(3)$  = couplage rotation position et vitesse (Barrau & Bonnabel 2016) -> Filtrage invariant
  - SLAM or contact points -> groupe  $SE_{N+2}(3)$  (Bonnabel 2012, Barrau&Bonnabel 2015)



# Utilisation en robotique bipède

- Filtrage de Kalman invariant (Invariant EKF) pour la localization IMU/GPS
- Contact-aided invariant EKF pour la localization de robots à pattes/jambes

*Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems*

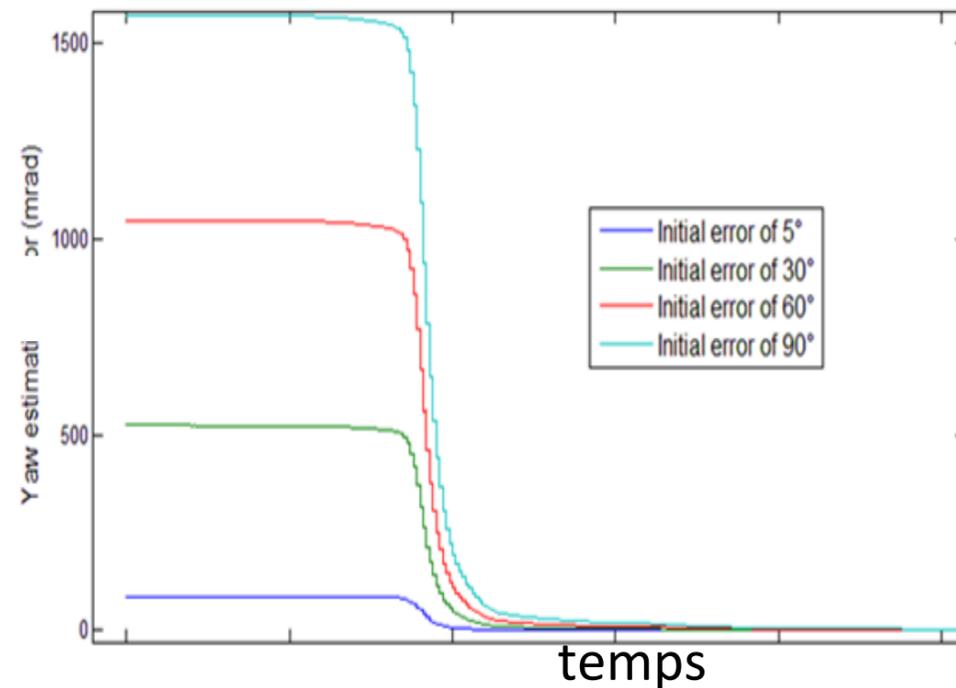
# Invariant Kalman Filtering

Axel Barrau<sup>1</sup> and Silvère Bonnabel<sup>2</sup>

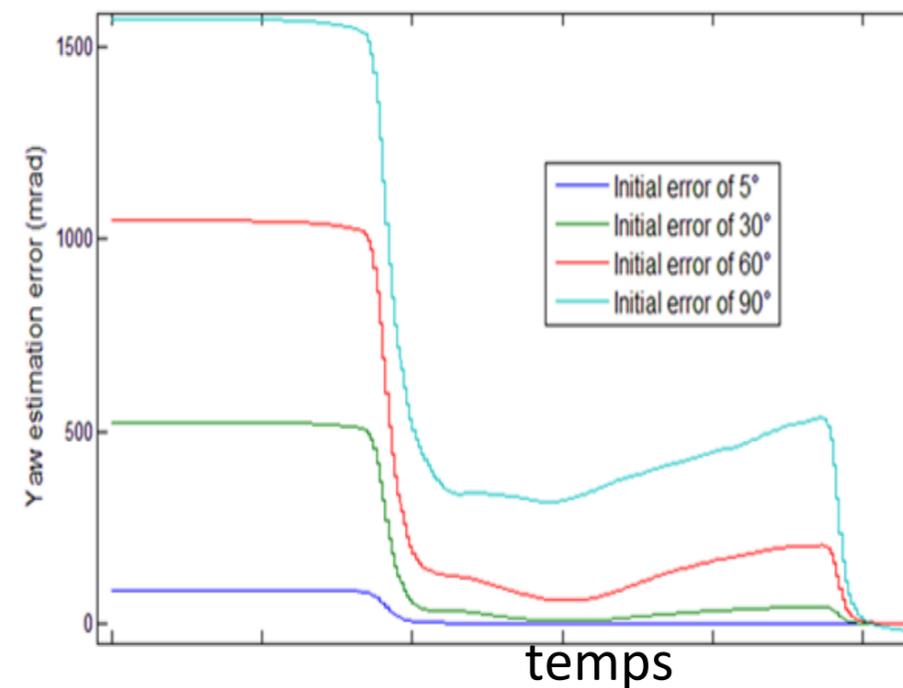


**Axel Barrau**

*Filtre invariant basé  $SE_2(3)$*



*Filtre Kalman étendu classique*



Filtrage  
invariant  
pour fusion  
IMU/GPS

Erreur  
d'estimation

# « Euroflir 410 »



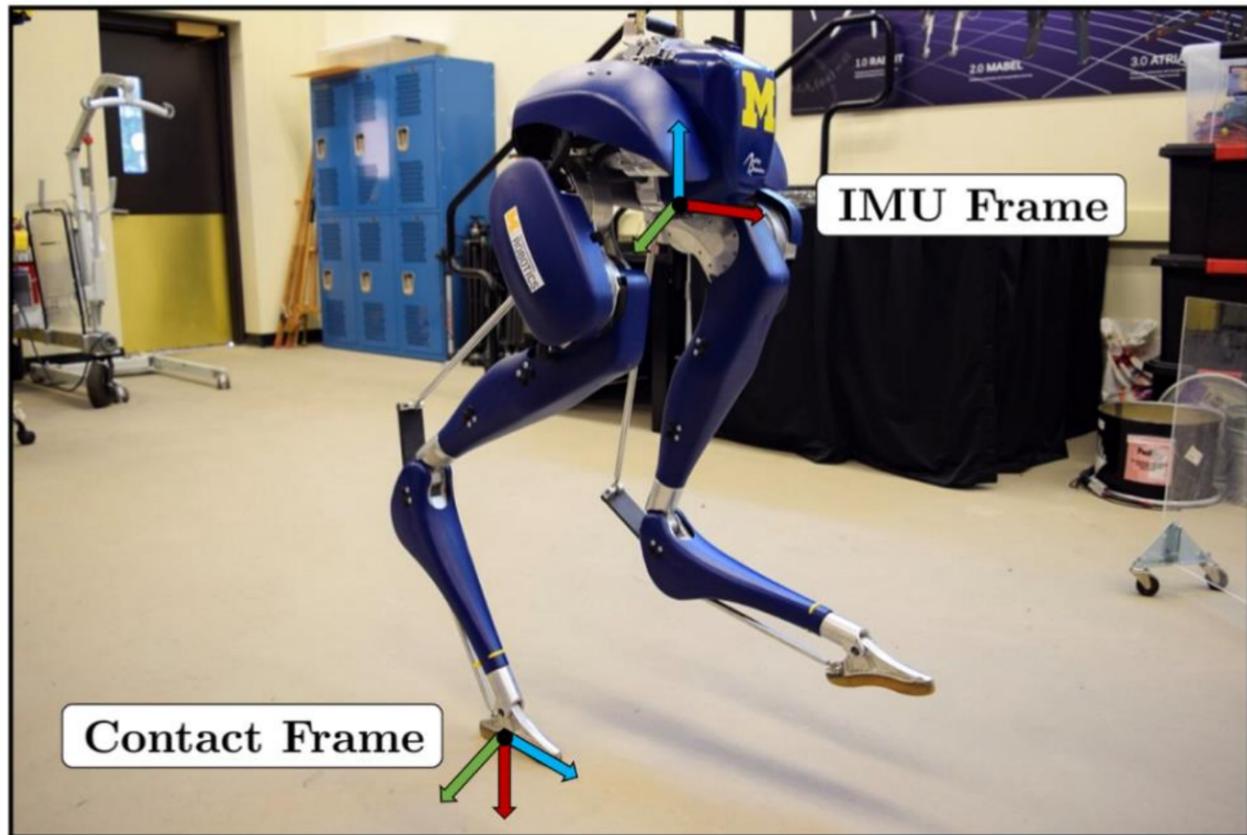
*EUROFLIR™ 410*

Vision gyrostabilisée à des km

 **SAFRAN**  
ELECTRONICS & DEFENSE

...grâce à Axel Barrau et les ingénieurs de Safran...

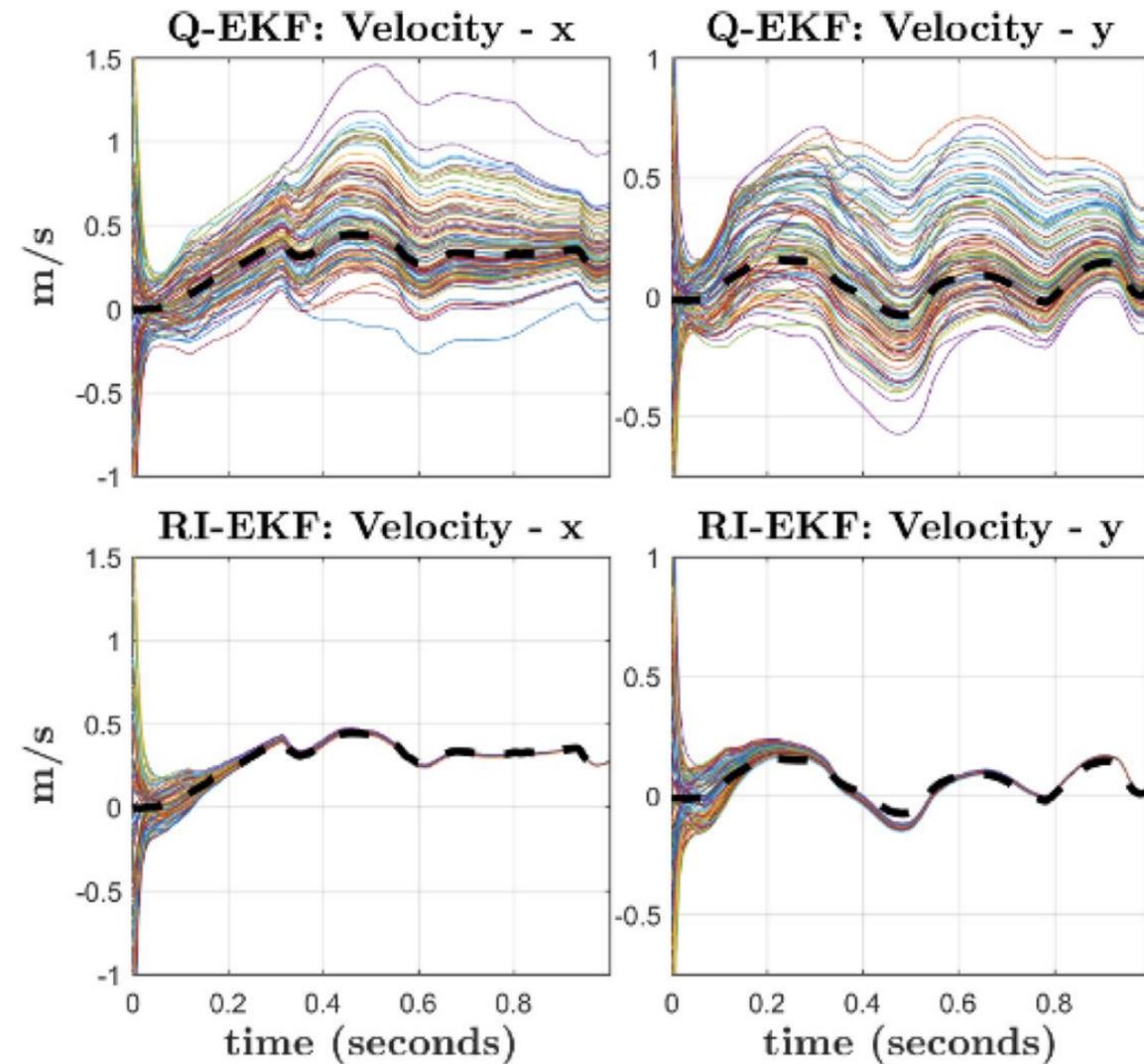
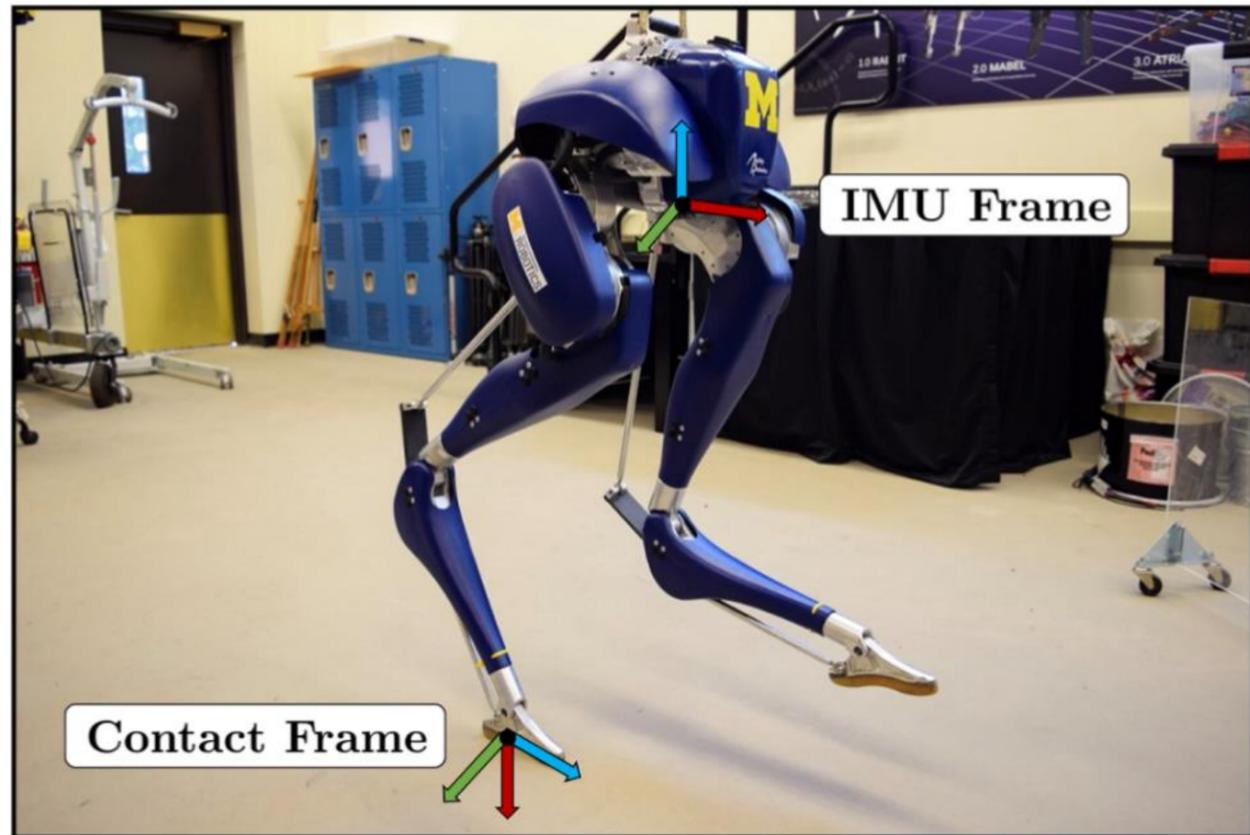
# Robot bipède : fusion IMU/contacts (Université du Michigan)



Bloesch, M., Hutter, M., Hoepflinger, M. A., Leutenegger, S., Gehring, C., Remy, C. D., & Siegwart, R. (2013). State estimation for legged robots-consistent fusion of leg kinematics and IMU. *Robotics*, 17, 17-24.

Nicholas Rotella, Michael Bloesch, Ludovic Righetti, and Stefan Schaal. State estimation for a humanoid robot. In IROS 2014.

# Robot bipède : fusion IMU/contacts (Université du Michigan)

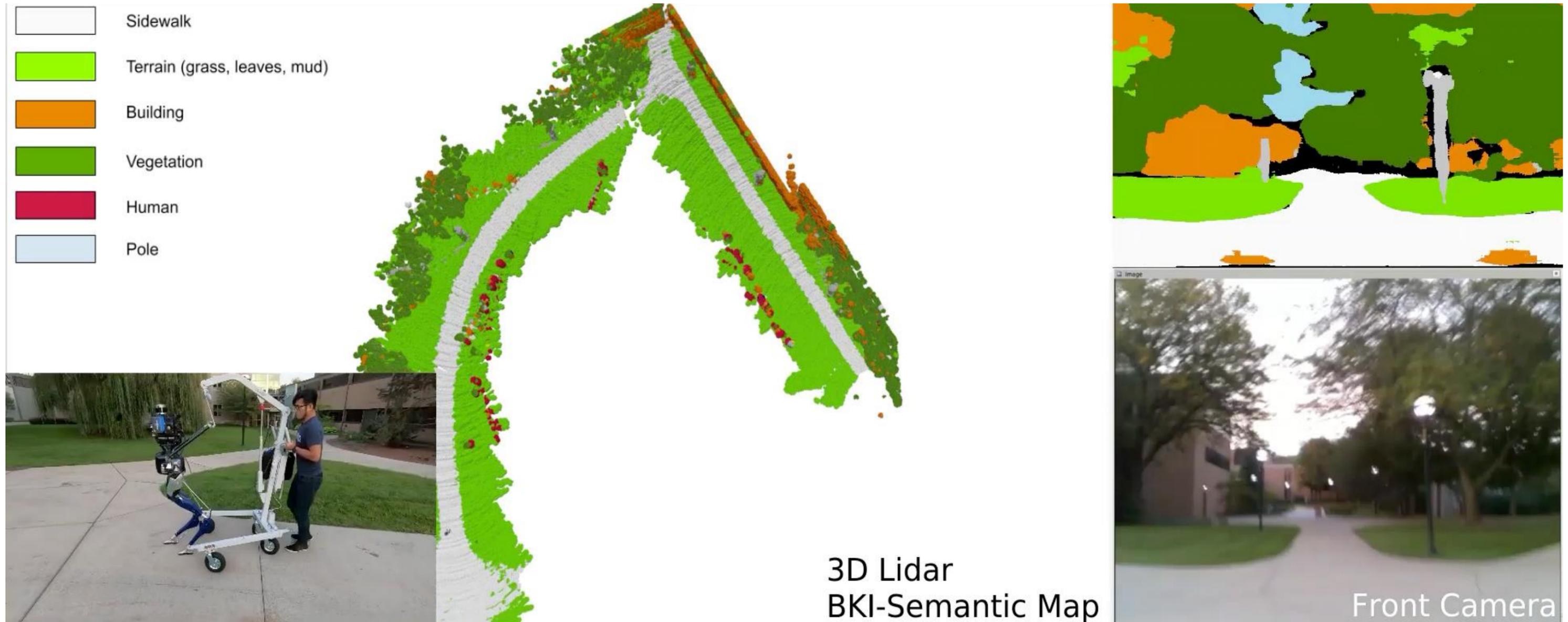


*Filtre de Kalman étendu classique*

*Notre filtre de Kalman étendu invariant*

Ross Hartley, Maani Ghaffari, Ryan M Eustice & Jessy W Grizzle. Contact-aided invariant extended Kalman filtering for robot state estimation. *The International Journal of Robotics Research*. 2020.

# Robot bipède : fusion IMU/contacts (Université du Michigan)



# Quelques éléments d'explication

- On va se concentrer sur la propagation des incertitudes (même si pas la propriété essentielle) pour expliquer un peu les propriétés

# Equations non-linéaires

- Dynamique non-linéaire de la navigation
- Comment propager l'incertitude ?

$$\mathbf{R}_{WB}(t + \Delta t) = \mathbf{R}_{WB}(t) \text{Exp}({}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}(t)\Delta t)$$

$${}_w\mathbf{v}(t + \Delta t) = {}_w\mathbf{v}(t) + {}_w\mathbf{a}(t)\Delta t$$

$${}_w\mathbf{p}(t + \Delta t) = {}_w\mathbf{p}(t) + {}_w\mathbf{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}{}_w\mathbf{a}(t)\Delta t^2.$$

# Equations non-linéaires

- Dynamique non-linéaire de la navigation  $\mathbf{X}_{n+1} = f(\mathbf{X}_n)$
- Comment propager l'incertitude ?  $\mu_{n+1} := f(\mu_n)$

$$\mathbf{X}_n \approx \mu_n + \xi_n, \xi_n \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{P}_n)$$

$$\mathbf{X}_{n+1} = f(\mathbf{X}_n) = f(\mu_n + \xi_n) \approx \mu_{n+1} + \mathbf{J}_f(\mu_n)\xi_n$$

$$\Rightarrow \xi_{n+1} \approx \mathcal{N}(0, \mathbf{J}_f(\mu_n)\mathbf{P}_n\mathbf{J}_f(\mu_n)^T)$$

$$\xi_{n+1} \approx \mathbf{J}_f(\mu_n)\xi_n$$

Approche perturbative : « filtre de Kalman étendu »

# Explications cas simple

- Groupe de Lie Spécial Orthogonal = orientation uniquement

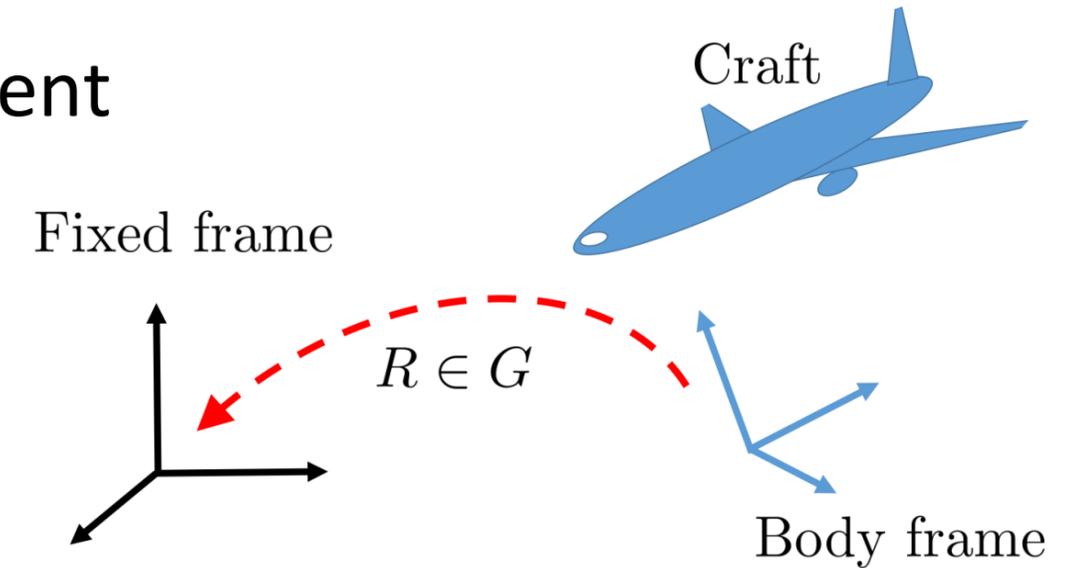
$$SO(3) = \{ \mathbf{R} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / \mathbf{R}\mathbf{R}^T = I_3, \det \mathbf{R} = 1 \}$$

- Dynamique non-linéaire (SO(3) n'est pas un EV)

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_n \Omega_n$$

- Incertitudes

$$\mathbf{X}_n \approx \mu_n + \xi_n, \xi_n \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{P}_n) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{R}_n = \mu_n \exp[(\xi_n)_\times]$$
$$\xi_n \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{P}_n)$$



# Explications cas simple $SO(3)$

- Groupe de Lie Spécial Orthogonal

$$SO(3) = \{\mathbf{R} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / \mathbf{R}\mathbf{R}^T = I_3, \det \mathbf{R} = 1\}$$

- Dynamique non-linéaire

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_n \Omega_n$$

- Incertitudes

$$\mathbf{X}_n \approx \mu_n + \xi_n, \xi_n \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{P}_n) \quad \longrightarrow$$

$$\mathbf{R}_n = \mu_n \exp[(\xi_n)_\times] \quad \text{Petite rotation aléatoire}$$
$$\xi_n \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{P}_n)$$

$$(\xi)_\times b := \begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

# Explications cas simple $SO(3)$

- Groupe de Lie Spécial Orthogonal

$$SO(3) = \{ \mathbf{R} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / \mathbf{R}\mathbf{R}^T = I_3, \det \mathbf{R} = 1 \}$$

$$\mu \exp[(\xi)_{\times}] \Omega = \mu \left[ \sum_k \frac{1}{k!} (\xi)_{\times}^k \right] \Omega$$

- Dynamique non-linéaire

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_n \Omega_n$$

$$\xi \times \Omega b = \Omega (\Omega^{-1} \xi \times b) \Rightarrow (\xi)_{\times} \Omega = \Omega [(\Omega^{-1} \xi)_{\times}]$$

$$[(\xi)_{\times}] [(\xi)_{\times}] \Omega = [(\xi)_{\times}] \Omega [(\Omega^{-1} \xi)_{\times}] = \Omega [(\Omega^{-1} \xi)_{\times}]^2$$

- Incertitudes

$$\mathbf{X}_n \approx \mu_n + \xi_n, \xi_n \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{P}_n)$$



$$\mathbf{R}_n = \mu_n \exp[(\xi_n)_{\times}]$$

$$\xi_n \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{P}_n)$$

# Explications cas simple $SO(3)$

- Groupe de Lie Spécial Orthogonal

$$SO(3) = \{\mathbf{R} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / \mathbf{R}\mathbf{R}^T = I_3, \det \mathbf{R} = 1\}$$

- Dynamique non-linéaire

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_n \Omega_n$$

- Incertitudes

$$\mathbf{X}_n \approx \mu_n + \xi_n, \xi_n \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{P}_n)$$



$$\mathbf{R}_n = \mu_n \exp[(\xi_n)_\times]$$

$$\xi_n \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{P}_n)$$

$$\mu \exp[(\xi)_\times] \Omega = \mu \left[ \sum_k \frac{1}{k!} (\xi)_\times^k \right] \Omega$$

$$[(\xi)_\times]^k \Omega = \Omega (\Omega^{-1} \xi)_\times^k$$

# Explications cas simple SO(3)

- Groupe de Lie Spécial Orthogonal

$$SO(3) = \{\mathbf{R} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / \mathbf{R}\mathbf{R}^T = I_3, \det \mathbf{R} = 1\}$$

- Dynamique non-linéaire

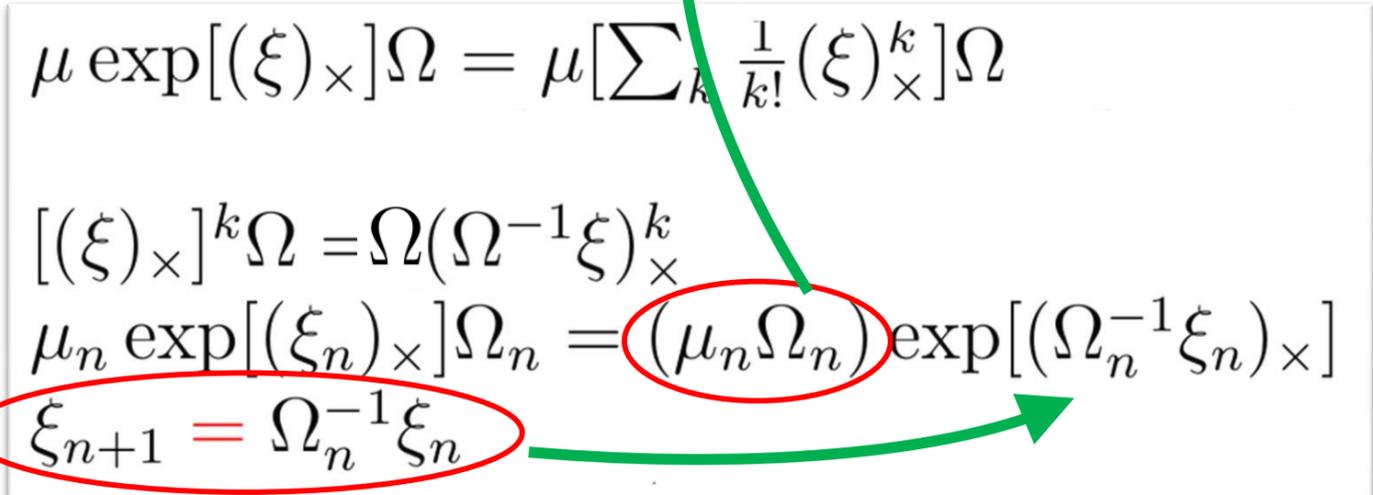
$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_n \Omega_n$$


$$\mu_{n+1} := f(\mu_n)$$

$$\mu \exp[(\xi)_{\times}] \Omega = \mu \left[ \sum_k \frac{1}{k!} (\xi)_{\times}^k \right] \Omega$$

$$[(\xi)_{\times}]^k \Omega = \Omega (\Omega^{-1} \xi)_{\times}^k$$

$$\mu_n \exp[(\xi_n)_{\times}] \Omega_n = (\mu_n \Omega_n) \exp[(\Omega_n^{-1} \xi_n)_{\times}]$$

$$\xi_{n+1} = \Omega_n^{-1} \xi_n$$


- Incertitudes

$$\mathbf{X}_n \approx \mu_n + \xi_n, \xi_n \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{P}_n)$$


$$\mathbf{R}_n = \mu_n \exp[(\xi_n)_{\times}]$$

$$\xi_n \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{P}_n)$$

# Explications cas simple $SO(3)$

- Groupe de Lie Spécial Orthogonal

$$SO(3) = \{ \mathbf{R} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / \mathbf{R}\mathbf{R}^T = I_3, \det \mathbf{R} = 1 \}$$

- Dynamique non-linéaire

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_n \Omega_n$$

- Incertitudes

$$\mathbf{X}_n \approx \mu_n + \xi_n, \xi_n \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{P}_n) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{R}_n = \mu_n \exp[(\xi_n)_\times]$$

$$\xi_n \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{P}_n)$$



$$\mu_{n+1} := f(\mu_n)$$

$$\mu \exp[(\xi)_\times] \Omega = \mu \left[ \sum_k \frac{1}{k!} (\xi)_\times^k \right] \Omega$$

$$[(\xi)_\times]^k \Omega = \Omega (\Omega^{-1} \xi)_\times^k$$

$$\mu_n \exp[(\xi_n)_\times] \Omega_n = (\mu_n \Omega_n) \exp[(\Omega_n^{-1} \xi_n)_\times]$$

$$\xi_{n+1} = \Omega_n^{-1} \xi_n$$

# Explications cas simple $SO(3)$

- Groupe de Lie Spécial Orthogonal

$$SO(3) = \{ \mathbf{R} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / \mathbf{R}\mathbf{R}^T = I_3, \det \mathbf{R} = 1 \}$$

- Dynamique non-linéaire

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_n \Omega_n$$

- Incertitudes

$$\mathbf{X}_n \approx \mu_n + \xi_n, \xi_n \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{P}_n)$$

$$\mu_{n+1} := f(\mu_n)$$

$$\mu \exp[(\xi)_{\times}] \Omega = \mu \left[ \sum_k \frac{1}{k!} (\xi)_{\times}^k \right] \Omega$$

$$[(\xi)_{\times}]^k \Omega = (\Omega^{-1} \xi)_{\times}^k$$

$$\mu_n \exp[(\xi_n)_{\times}] \Omega_n = (\mu_n \Omega_n) \exp[(\Omega_n^{-1} \xi_n)_{\times}]$$

$$\xi_{n+1} = \Omega_n^{-1} \xi_n$$

$$\Rightarrow \xi_{n+1} \sim \mathcal{N}(0, \Omega_n^{-1} \mathbf{P}_n \Omega_n)$$

$$\mathbf{R}_n = \mu_n \exp[(\xi_n)_{\times}]$$

$$\xi_n \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{P}_n)$$

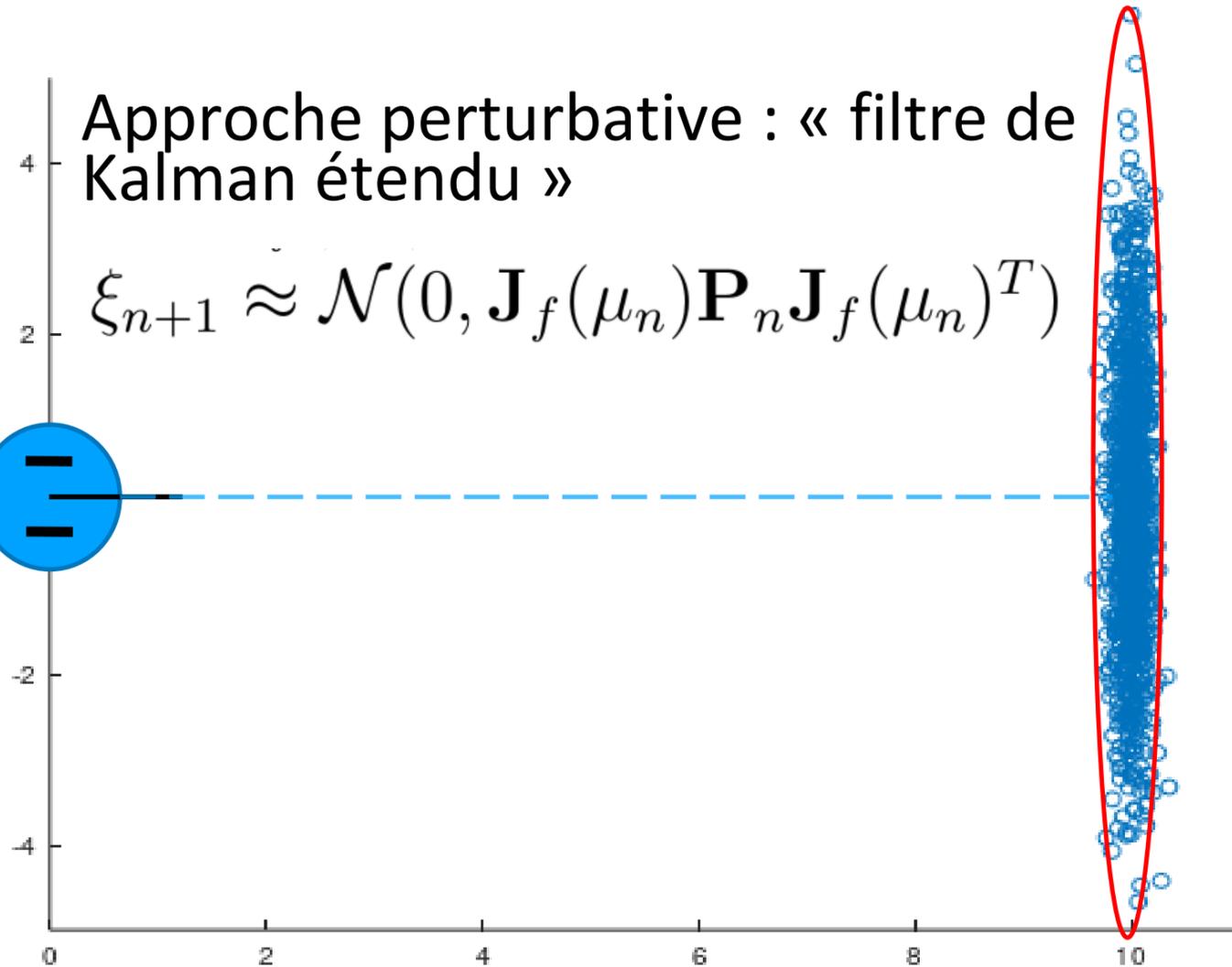
Propagation exacte !

Et independante de R !

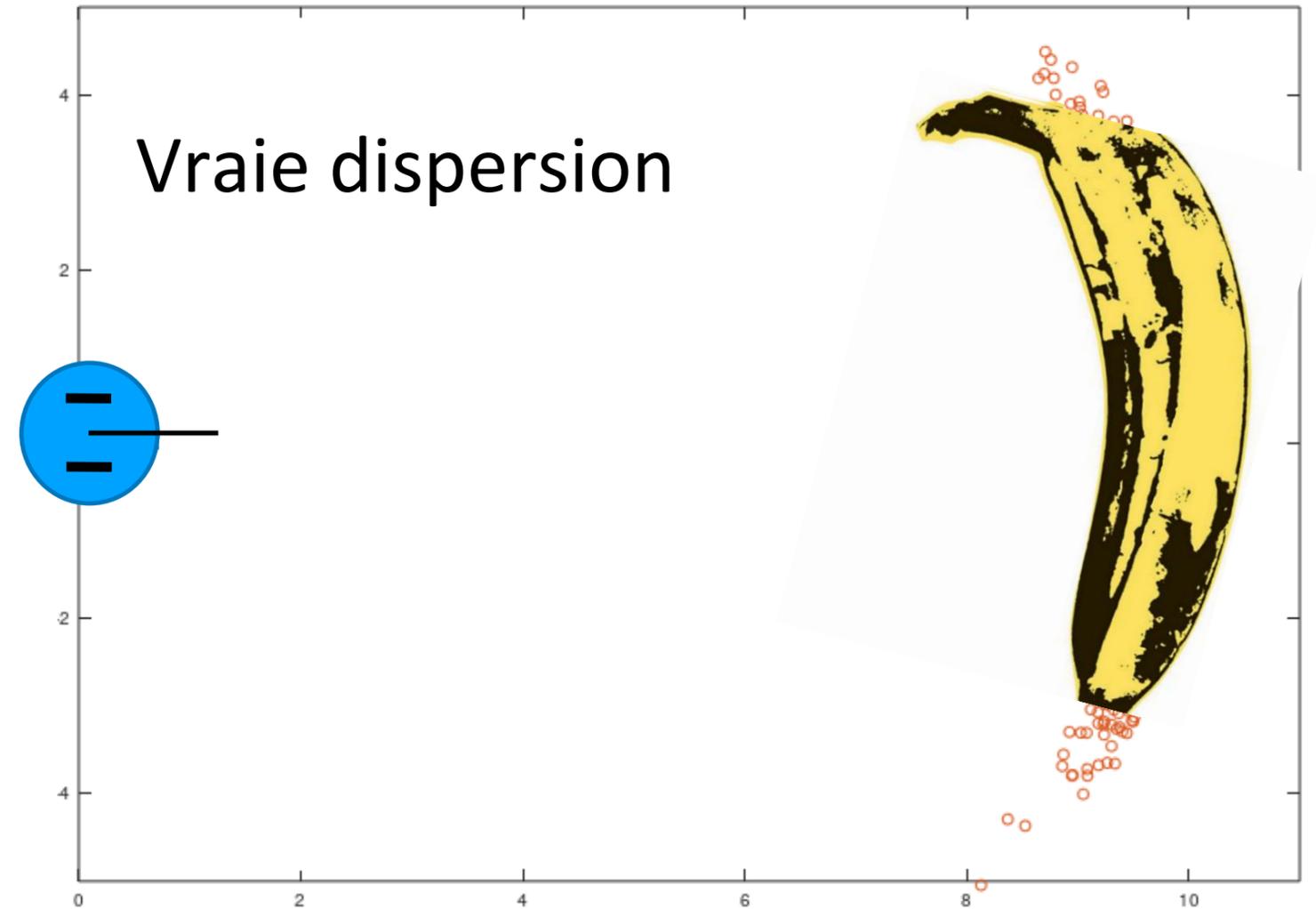
# Propagation d'une erreur sur SE(2)

Approche perturbative : « filtre de Kalman étendu »

$$\xi_{n+1} \approx \mathcal{N}(0, \mathbf{J}_f(\mu_n) \mathbf{P}_n \mathbf{J}_f(\mu_n)^T)$$



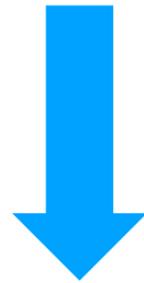
Vraie dispersion



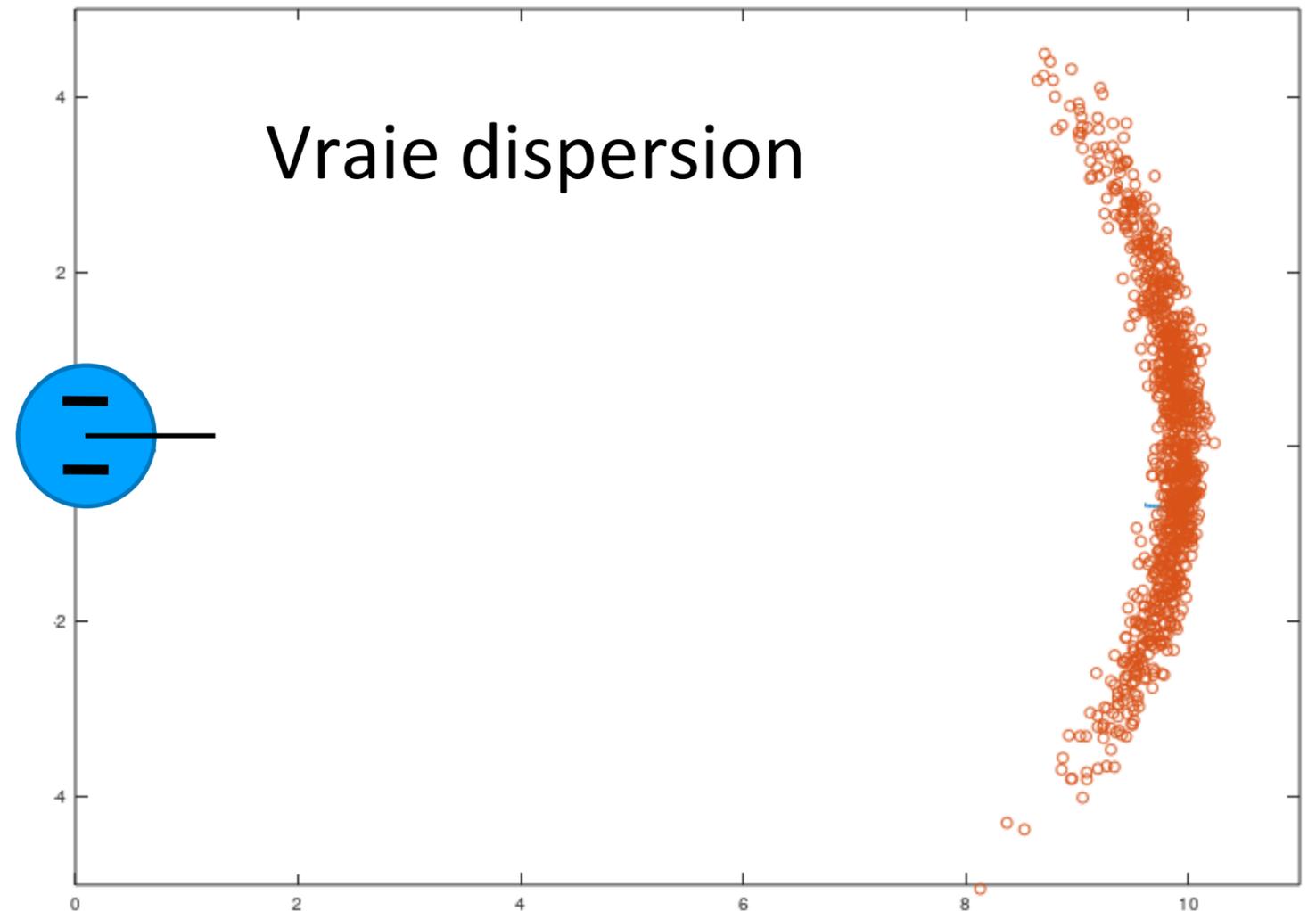
Long, A. W., Wolfe, K. C., Mashner, M. J., & Chirikjian, G. S. **The banana distribution is Gaussian**: A localization study with exponential coordinates. *Robotics: Science and Systems (RSS)*. 2013.

# Propagation d'une erreur sur SE(2)

L'application exponentielle de SE(2) rend parfaitement compte de la dispersion observée



Barfoot, T. D., & Furgale, P. T. Associating uncertainty with three-dimensional poses for use in estimation problems. *IEEE Transactions on Robotics*. 2014.



Long, A. W., Wolfe, K. C., Mashner, M. J., & Chirikjian, G. S. **The banana distribution is Gaussian**: A localization study with exponential coordinates. *Robotics: Science and Systems (RSS)*. 2013.

# Cas général (Barrau Bonnabel 2012-2016)

- On se place sur un groupe de Lie général et on définit les incertitudes via l'exponentielle
- On peut définir une large classe de dynamiques qui possèdent la propriété de propagation exacte et linéaire : la structure sous-jacente s'appuie sur les (auto) morphismes de groupe



## Théorèmes classiques de correspondance groupe de Lie – algèbre de Lie

THEOREM 3.18. *Let  $G$  and  $H$  be matrix Lie groups, with Lie algebras  $\mathfrak{g}$  and  $\mathfrak{h}$ , respectively. Suppose that  $\phi : G \rightarrow H$  be a Lie group homomorphism. Then there exists a unique real linear map  $\tilde{\phi} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  such that*

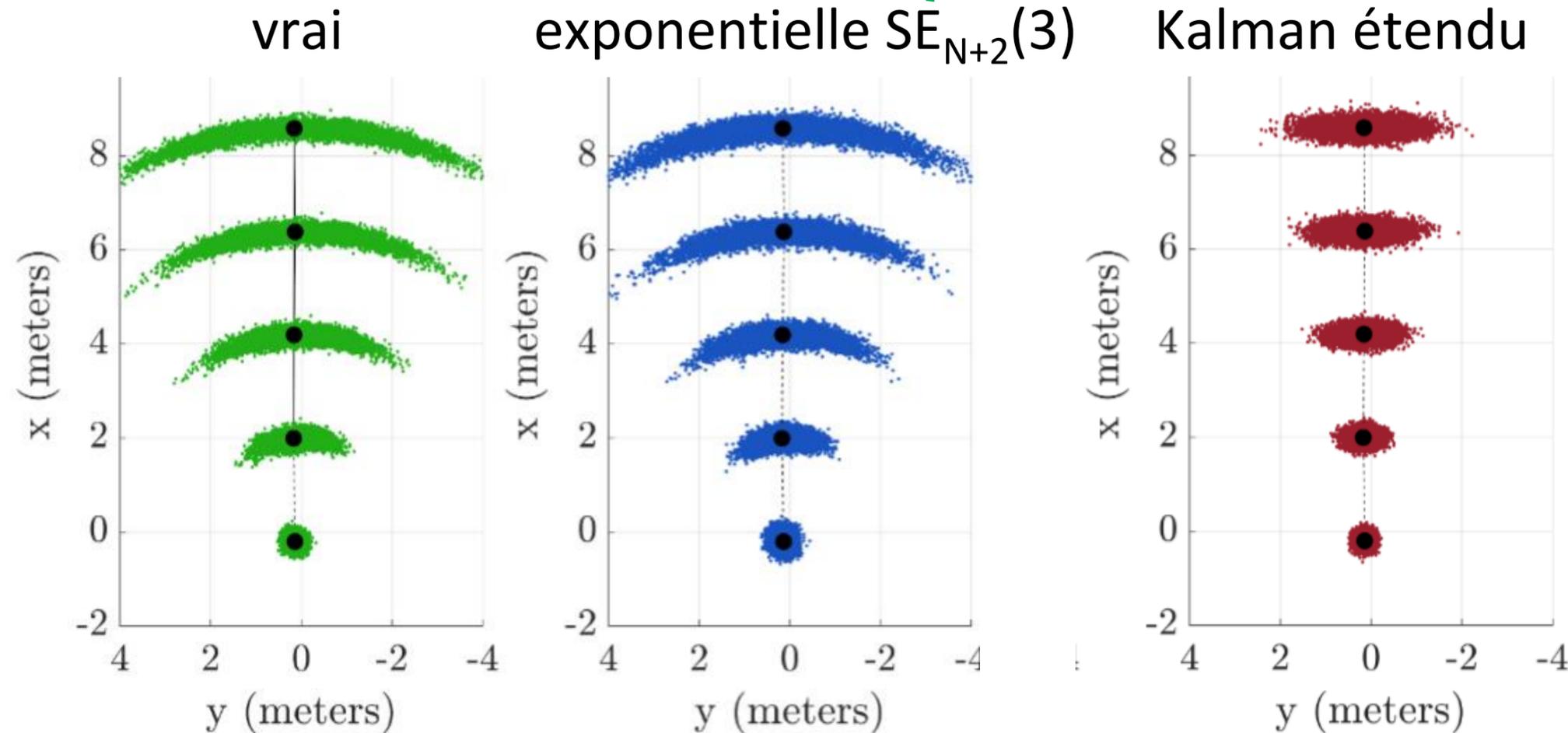
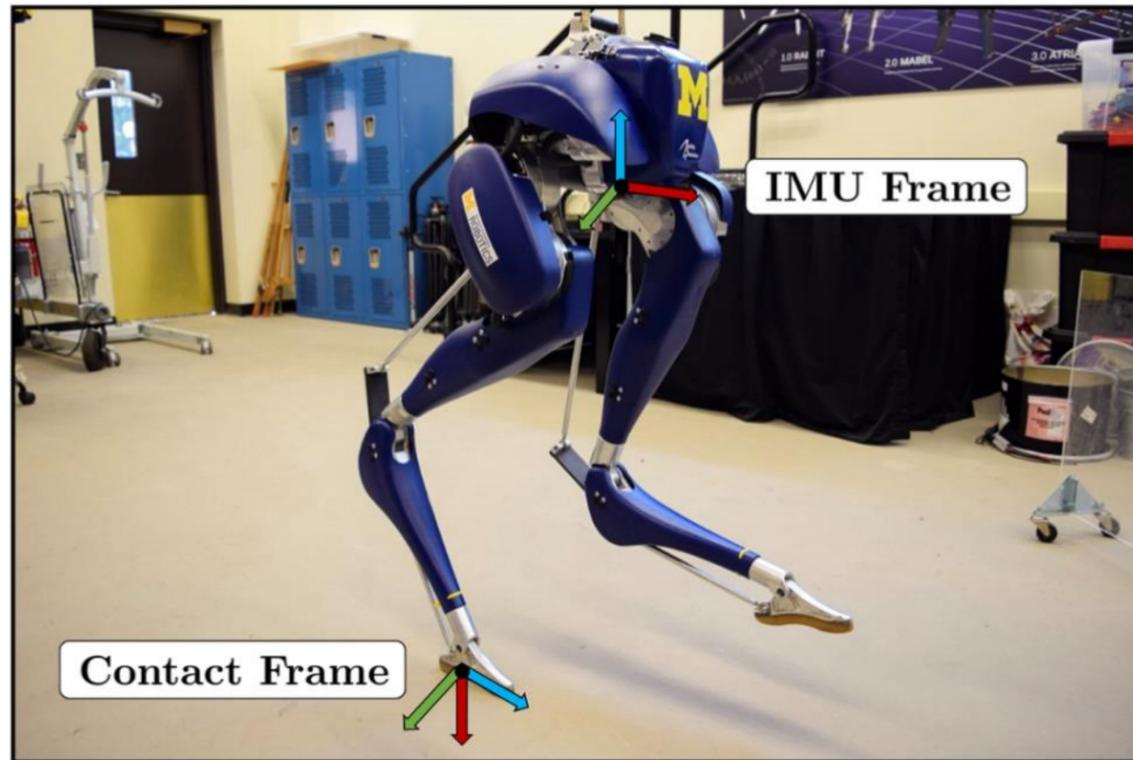
$$\phi(e^X) = e^{\tilde{\phi}(X)}$$

- Les équations de la navigation inertielle entrent dans ce cadre ! (en introduisant  $SE_2(3)$ )

# Propagation d'une erreur sur $SE_{N+2}(3)$

- Illustration par U-Michigan de notre théorie : explique la forme « banane » sur un exemple plus compliqué

Barrau, A., & Bonnabel, S. The invariant extended Kalman filter as a stable observer. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2016



Ross Hartley, Maani Ghaffari, Ryan M Eustice & Jessy W Grizzle. Contact-aided invariant extended Kalman filtering for robot state estimation. *The International Journal of Robotics Research*. 2020.

# Et ensuite ?

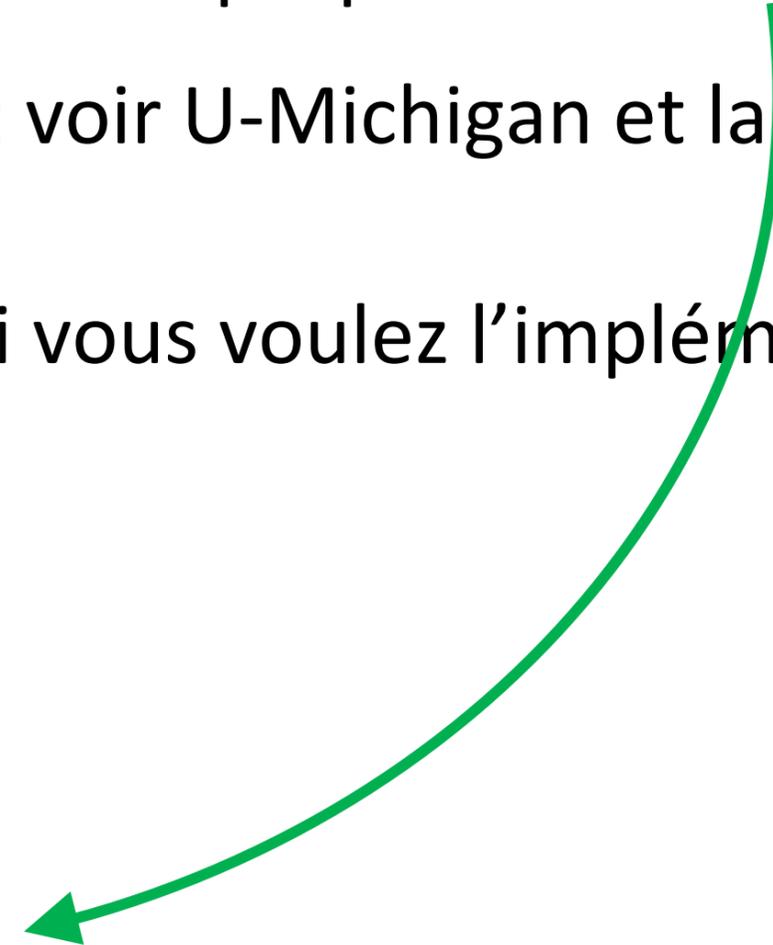
- Il faut aussi incorporer les observations (une fois l'incertitude propagée) -> étape de correction
- La théorie du filtre de Kalman invariant englobe aussi les corrections et **utilise l'exponentielle pour les appliquer** -> propriétés fortes

# Conclusion

- Une théorie complète, et riche avec des propriétés inattendues
- Applications en robotique bipède : voir U-Michigan et la littérature qui a suivi
- Je peux aider avec les équations, si vous voulez l'implémenter 😊

Forster, C., Carlone, L., Dellaert, F., & Scaramuzza, D. (2016). On-manifold preintegration for real-time visual-inertial odometry. *IEEE Transactions on Robotics*, 33(1), 1-21.

Brossard, M., Barrau, A., Chauchat, P., & Bonnabel, S. (2021). Associating uncertainty to extended poses for on lie group IMU preintegration with rotating earth. *IEEE Transactions on Robotics*, 38(2), 998-1015.



# Perspectives / travaux liés (the 2021 edition)

Exploiter la linéarité en coordonnées exp

e.g. Lavoie, Arsenault, Forbes. CDC 2019.  
E Allak, Fornasier, Weiss, IROS 2020.

Propriétés de convergence

e.g. Wang, Tayebi. TAC. 2020.  
e.g. check out the *equivariant/invariant observers* literature

Nouvelles structures de groupe rendant la dynamique automorphisme

e.g. Mahony, van Goor, Henein, Pike, Zhang, Ng, Equivariant visual odometry in the wild. CDC. 2020.

Combiner au machine learning

e.g. Brossard, Barrau, Bonnabel. AI-IMU dead reckoning. IEEE Trans. Int. Vehicles. 2020.

Robotique

e.g. Zhang, Wu, Song, Huang, Dissanayake. IEEE RAL 2017.  
Teng, Mueller, Sreenath, 2021

Application au contrôle

e.g. Cohen, Abdulrahim, Forbes. IEEE RAL. 2020

Fusion inertie / vision

van Goor, Mahony, Hamel, Trumpf. CDC 2019.  
e.g. Brossard, Bonnabel, Barrau, IROS 2018.

D'autres produits industriels

## Collaborateurs scientifiques pour les travaux présentés



Axel Barrau



Martin Brossard



Paul Chauchat



Marion Pilté



Martin Barczyk



Pierre Rouchon



Philippe Martin



Erwan Salaün

+ ingénieurs SAGEM / Safran  
Electronics & Defense



**Merci !**